Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SVT, veuillez visiter :
bac-maths-svt.fr/annales-sujets-et-corriges

# Spécialité Mathématiques - Centres étrangers Afriques 2 - 2021 M

## Exercice 1 (les justifications sont données pour que vous compreniez vos erreurs)

1) **Réponse a**

Justification :

$g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout $x$ réels :

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$$

La tangente à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ie $y = 7(x-1)$

2) **Réponse b**

Justification : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n(1+2/n)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+2/n}$$

$$= 3$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

Remarque : on avait ici une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ !

→ on doit donc factorisé par le terme de plus haut degré, ici $n$.

3) **Réponse c**

Justification

On réalise 10 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante (tirage aléatoire avec remise) dont le succès "obtenir une boule noire" a pour probabilité 3/5.

$X$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ainsi $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 3/5$.

On a donc :

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

ie $P(X=4) = 0,1115$

4) **Réponse b**

Justification : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \frac{x}{e^x}\right)$

$$= +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, par croissance comparée

Remarque : forme indéterminée du type $+\infty - \infty$.

5) **Réponse b**

Justification : Il y a $36^8$ combinaisons possibles.

Or $\frac{36^8}{100\times10^6} = 28\,211$.

Donc le logiciel peut craquer le code en 28211 secondes soit 7,8 heures.

# Exercice 2

MS

## Partie A

1)a) o A l'année n+1, il reste 98 % des panneaux solaires de l'année précédente puisque 2 % se sont détériorés.
De plus 250 nouveaux sont installés.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,98\,u_n + 250$
où $u_n$ modélise le nombre de panneaux solaire à l'année n.

o Par ailleurs la première année (en 2020), on a 10560 panneaux solaires en place, ici $u_0 = 10560$

b) A la calculatrice, on trouve $u_n > 12000$ pour $n = 68$

c)
```
u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0.98 * u + 250
    n = n+1
print (n).
```

2) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$ : "$u_n \leqslant 12500$".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie
On a $u_0 = 10560 \leqslant 12500$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a :
$u_n \leqslant 12500 \iff 0,98\,u_n \leqslant 12250 \quad (0,98 > 0)$
$\iff 0,98\,u_n + 250 \leqslant 12500$
$\iff u_{n+1} \leqslant 12500$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel par principe de récurrence simple.
Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 12500$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$u_{n+1} - u_n = 0,98\,u_n + 250 - u_n$
$= 250 - 0,02\,u_n$.

Or $u_n \leqslant 12500 \iff -0,02\,u_n \geqslant -250 \quad (-0,02 < 0)$
$\iff u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

La suite $(u_n)$ est donc croissante

4) $(u_n)$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)$ converge vers un réel $l$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12500 \\ &= 0,98\,u_n - 1250 \\ &= 0,98\,(u_n - 1250/0,98) \\ &= 0,98\,(u_n - 12500) \end{aligned}$$

$v_{n+1} = 0,98\,v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,98$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = -1940$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -1940 \times 0,98^n$

c) On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 12500 - 1940 \times 0,98^n$

d) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$ car $0,98 \in ]-1;1[$.

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 12500$$

Dans le contexte du modèle, cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'année, la station Big Solar possèdera 12500 panneaux solaires.

## Partie B

1) $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a pour tout $x$ réels positifs :

$$f'(x) = 10\,e^{-0,02x+1,4}$$

Or on a pour tout $x$ réels positifs $f'(x) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,02x+1,4} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ (en posant $X = -0,02x+1,4$)

car $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,02x+1,4 = -\infty$.

ie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 12500$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f(x) > 12500 &\iff 12500 - 500\,e^{-0,02x+1,4} > 12000 \\ &\iff 500 > 500\,e^{-0,02x+1,4} \qquad (500 > 0) \\ &\iff 0 < e^{-0,02x+1,4} < 1 \\ &\iff -0,02x+1,4 < 0 \qquad \text{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff x > \frac{1,4}{0,02} \qquad (\text{car } -0,02 < 0) \end{aligned}$$

Le nombre de panneaux solaires dépassera les 12000 au bout de 70 ans dans ce modèle.

# Exercice 3

## Partie A

1) Dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD} ; \vec{AE})$, on a :

$F(1;0;1)$ car $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$

$I(0;1/2;1/2)$ car I est le centre de la face ADHE.

$J(1;1;2/3)$ car $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{AD} + a\vec{CG}$
$= \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$ (car $\vec{AE} = \vec{CG}$)

2) (d) est parallèle à (FJ) donc un vecteur directeur de (d) est le vecteur $\vec{FJ}(0;1;-1/3)$.

De plus, (d) passe par $I(0;1/2;1/2)$

Ainsi une représentation paramétrique de (d) est :

$$(d) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 + t \\ z = 1/2 - 1/3\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3) a) Le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ appartient à la droite (AE).
De plus en prenant $t = -1/2$ dans l'équation paramétrique de (d), on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1/2 + 1/6 = 2/3 \end{cases}$

Donc le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ appartient également à (d).

Ainsi le point de coordonnées $(0;0;2/3)$ est le point d'intersection des droites (AE) et (d), il s'agit donc du point K.

D'où $K(0;0;2/3)$

b) L appartient à la droite (DH), donc les coordonnées de L sont de la forme $(0;1;z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Or $L \in (d)$, donc en prenant $t = 1/2$ dans l'équation paramétrique de (d) on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 + 1/2 = 1 \\ z = 1/2 - (1/3) \times (1/2) = 1/3 \end{cases}$$

Ainsi $L(0;1;1/3)$

4) a) On a $\vec{FJ}(0;1;-1/3)$ et $\vec{KL}(0;1;-1/3)$
On remarque que $\vec{FJ} = \vec{KL}$.
On en déduit donc que FJLK est un parallélogramme

b) On a $FJ = \|\vec{FJ}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1/3)^2} = \sqrt{2}/3$
On a : $\vec{JL}(-1;0;-1/3)$ et $JL = \|\vec{JL}\| = \sqrt{2}/3$
Ainsi FJLK est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, donc FJLK est un losange.

c) On a :
$\vec{FJ} \cdot \vec{JL} = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1/3) \times (-1/3)$
$= 1/9 \neq 0$
Donc $\vec{FJ}$ et $\vec{JL}$ ne sont pas orthogonaux. FJLK n'est donc pas un carré

## Partie B

1) En fonction de a, on a $J(1;1;a)$ car $\vec{CJ} = a\vec{CG}$

2) $\vec{FJ}(0;1;a-1)$ et $\vec{KL}(0;1;a-1)$
On a donc $\vec{FJ} = \vec{KL}$ donc FJLK est un parallélogramme.

3) On a $\vec{JL}(-1;0;-a/2)$
$JL = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-a/2)^2}$
$= \sqrt{4+a^2}/2$

et $FJ = \sqrt{0^2 + 1^2 + (a-1)^2}$
$= \sqrt{1 + (a-1)^2}$

FJLK est un losange $\Leftrightarrow$ 2 côtés consécutifs sont de même longueur (car c'est un parallélogramme)

$\Leftrightarrow FJ = JL$
$\Leftrightarrow FJ^2 = JL^2$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)
$\Leftrightarrow \frac{4+a^2}{4} = 1 + (a-1)^2$
$\Leftrightarrow 1 + a^2/4 = 1 + a^2 - 2a + 1$
$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} - 2a + 1 = 0$
$\Leftrightarrow a = 2/3$ ou $a = 2$ (car $\Delta = 1 > 0$)
$\Leftrightarrow a = 2/3$ (car $a \in [0;1]$)

Ainsi FJLK est un losange si $a = 2/3$

4) FJKL est un carré $\Leftrightarrow$ FJKL est un losange ayant un angle droit
$\Leftrightarrow \vec{FJ} \cdot \vec{JL} = 0$
$\Leftrightarrow 0 \times (-1) + 1 \times 0 + (a-1)(-a/2) = 0$
$\Leftrightarrow a/2 = 0$ ou $a - 1 = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 1$

FJKL est un carré si $a = 0$ ou $a = 1$

## Exercice A

### Partie A

1). Si le test est négatif, une seule analyse aura été effectuée (l'analyse du mélange) donc dans ce cas $X_m$ prend la valeur 1.
- Si le test positif, on réalise une analyse du sang des m personnes en plus de l'analyse du mélange au début. Dans ce cas $X_m$ prend la valeur $m+1$.

Ainsi $X_m$ prend les valeurs 1 et $m+1$

2) Si $X_m$ prend la valeur 1, cela signifie qu'aucune des m personnes n'est malade.
Or la probabilité que l'individu ne soit pas malade est de 0,95.
Ainsi $P(X_m = 1) = 0,95^m$
Donc :
$P(X_m = m+1) = 1 - P(\overline{X_m = m+1})$
$= 1 - P(X_m = 1)$
$P(X_m = m+1) = 1 - 0,95^m$

La loi de $X_m$ est donc :

| $x_i$ | $1$ | $m+1$ |
|---|---|---|
| $P(X_m = x_i)$ | $0,95^m$ | $1-0,95^m$ |

3) L'espérance de $X_m$ représente le nombre moyen d'analyse réalisées lors du test de $m$ individus.

$$E(X_m) = 1 \times P(X_m = 1) + (m+1) P(X_m = m+1)$$
$$= 0,95^m + (m+1)(1-0,95^m)$$

$$E(X_m) = m+1 - m \times 0,95^m$$

Partie B

1) $f$ est dérivable sur $[20;+\infty[$ car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[20;+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0,95)$$

On a :

$x \geqslant 20 \iff 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{20}$ (par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff f'(x) \leqslant \frac{1}{20} + \ln(0,95) < 0$

Ainsi :

$\forall x \in [20;+\infty[,\ f'(x) < 0$.

$f$ est donc strictement décroissante sur $[20;+\infty[$

2) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) + x\ln(0,95)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \ln(0,95)\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (car $\ln(0,95) < 0$)

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par croissance comparée.

3) • $f$ est continue sur $[20;+\infty[$ comme somme de fonction qui le sont (la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
• $f$ est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$
• $f([20;+\infty[) = ]-\infty ; f(20)]$.

Or :

$f(20) = \ln(20) - 20\ln(0,95) \simeq 1,97 > 0$.

Donc $0 \in ]-\infty ; f(20)]$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[20;+\infty[$.

A la calculatrice, on obtient $87 < \alpha < 87,1$

4) $f$ est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$ et s'annule en $\alpha$ donc :
• $f$ est positive sur $[20;\alpha[$
• $f$ est nulle en $\alpha$
• $f$ est négative sur $]\alpha;+\infty[$

## Partie C

1) D'après la partie A : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = 1 + n - 0{,}95^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$E(X_n) < n \iff n + 1 - n \times 0{,}95^n < n$
$\iff n \times 0{,}95^n > 1$
$\iff \ln(n) + n \ln(0{,}95) > 0$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\iff f(n) > 0$
$\iff n \in [\![20 ; 87]\!]$ (car $87 < \alpha < 87{,}1$)

Ainsi la première méthode permet de diminuer le nombre d'analyse pour des échantillons de 87 personnes maximum.

## Exercice B

### Partie A

1) Par lecture graphique, on a :
- $f(0) = 3$
- $f'(0) = -2$ (coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0)

2) On a :
$f(0) = e^0 + be^0 = 3 \iff 1 + b = 3$
$\iff b = 2$

3) a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a donc pour tout $x$ réels :
$f'(x) = e^x - 2e^{-x} + a$

b) On a : $f'(0) = e^0 - 2e^0 + a$
$f'(0) = a - 1$

c) On a :
$f'(0) = -2 \iff a - 1 = -2$
$\iff a = -1$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

4) a) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après 3a, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 2e^{-x} - 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) + g(x) = e^x - 2e^{-x} - 1 + e^x - x + 2e^{-x}$

ie $g'(x) + g(x) = 2e^x - x - 1$

Ainsi $g$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

b) On a $y' + y = 0 \iff y' = -y$ $(H)$

Pour tout $x$ réel, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(H)$ est :

$\{y : x \mapsto ke^{-x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

c) $g$ est une solution particulière de $(E)$ et on dispose de l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(H)$ MS
Ainsi l'ensemble des solutions de $(E)$ est, pour tout $x$ réels :

$$\{ y : x \mapsto e^x - x + (k+2)e^{-x} \mid k \in \mathbb{R} \}$$

## Partie B

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$(e^x - 2)(e^x + 1) = e^{2x} - 2e^x + e^x - 2$
$(e^x - 2)(e^x + 1) = e^{2x} - e^x - 2$

Remarque : on peut procéder autrement.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$e^{2x} - e^x - 2 = 0 \iff (e^x)^2 - e^x - 2 = 0$
$\iff X^2 - X - 2 = 0$, en posant $X = e^x$
$\iff X = -1$ ou $X = 2$, car $\Delta = 9 > 0$

Ainsi $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x + 1)(e^x - 2)$

→ on a trouver les deux racines
→ on rappelle que la forme factorisée d'un polynôme à 2 racines $x_1$ et $x_2$ est $(X - x_1)(X - x_2)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$g'(x) = e^x - 2e^{-x} - 1$
$= e^{-x}(e^{2x} - 2 - e^x)$
$g'(x) = e^{-x}(e^x - 2)(e^x + 1)$

3) En admettant que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $e^x - 2 > 0$, on en déduit que :
$\forall x \in [1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[1; +\infty[$.

Ainsi $g$ est croissante sur $[1; +\infty[$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.