Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

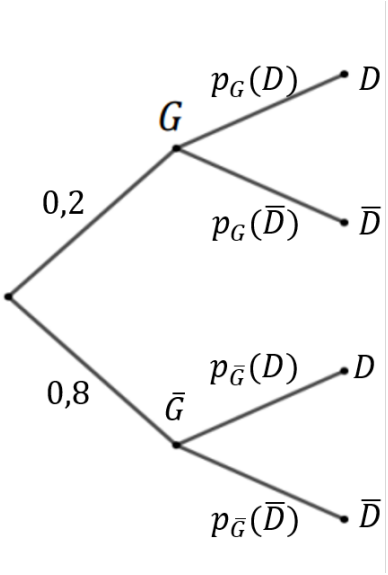
Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SVT, veuillez visiter :
bac-maths-svt.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques - Métropole 1 - 2023

Merci d'adresser vos éventuelles remarques à `anthony.le.bihan@icloud.com`. Je ne réponds pas aux questions.

Exercice 1 (5 points)

D'après les données, on peut à l'avance établir l'arbre pondéré suivant :



On sait de plus que $p(G \cap D) = 0,002$ et $p(D) = 0,082$.

1. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_G(D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(G)} = \dfrac{0,2}{20} = 0,01$. **La réponse est B.**

2. Puisque $(G, \bar{G})$ forme un système complet d'événements (ou une partition de l'univers), la formule des probabilités totales nous dit que :

$$p(D) = p(D \cap G) + p(D \cap \bar{G}) \implies p(D \cap \bar{G}) = p(D) - p(D \cap G) = 0,082 - 0,002 = 0,08$$

La réponse est B.

3. On cherche $p_D(G)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,2}{8,2} = 0,0244 \simeq 0,024$. **La réponse est B.**

4. D'après le cours sur les lois binomiales, si $X \sim \mathcal{B}(50; 0,082)$, alors $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ici, en utilisant les événements contraires :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$

car $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$. Arrivé ici, il y a 2 possibilités. Soit on utilise la calculatrice et :
— fonction de partition pour $X = 0$, $X = 1$ et $X = 2$
— fonction de répartition pour $X \leq 2$
Dans les deux cas, on trouve $P(X > 2) \simeq 0,78858 \simeq 0,789$. Ainsi,

$$P(X > 2) = 1 - (1 - 0,082)^{50} - 50 \times 0,082 \times (1 - 0,082)^{49} = 0,78858 \simeq 0,789$$

La réponse est B.

5. On cherche désormais n tel que $p(X = 0) > 0,4$ où $X \sim \mathcal{B}(n; 0,082)$. Or,

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = (1 - 0,082)^n$$

On doit donc résoudre : $(1 - 0,082)^n > 0,4$.

$$(1 - 0,082)^n > 0,4 \iff n \log(1 - 0,082) > \log(0,4)$$

par application de la fonction log, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi,

$$n\log(0,918) > \log(0,4) \iff n < \frac{\log(0,4)}{\log(0,918)} \quad \text{changement du sens de l'inégalité car log(0,918)<0}$$

Après calculs, $n < 10,7 \iff n \leq 10$. **La réponse est C.**

Exercice 2

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 8\ln(x) \end{array}$$

1. Par le cours sur les limites de fonctions usuelles, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 8 \times (-\infty) = +\infty$$

2. Par le cours sur les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Donc, par opérations sur les limites
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 8 \times 0) = +\infty$$

3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc en dérivant terme à terme l'expression première de f, il vient que
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8x}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}$$

4. On étudie successivement le signe du numérateur et du dénominateur de f' pour en déduire son signe :

x	0		2		$+\infty$
$2(x^2-4)$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Avec $f(2) = 4 - 8\ln(2) = 4(1 - \ln(4)) \simeq -1,54$.

5. On sait que :
— f est continue sur $]0;2]$
— f est strictement décroissante sur $]0;2]$
— $[f(2), f(0)[= [4 - 8\ln(2); +\infty[$ et donc $0 \in [f(2), f(0)[$
d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;2]$.

6. A partir des 2 questions précédentes, on peut déduire le tableau de signe de f :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

7. On a finalement $\forall x \in]0;+\infty[, g_k(x) = f(x)+k$. On peut tout simplement retracer le tableau de variations de g_k à partir de celui de f :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$g_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)+k$	$\nearrow$	$+\infty$

Il suffit juste de "décaler de k". Et on veut donc g_k positive c'est-à-dire $f(2)+k \geq 0 \iff k \geq -f(2)$. La plus petite valeur de k telle que g_k reste positive est $8\ln(2) - 4$.

Exercice 3

Première modélisation

1. $u_2 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$. Au 2ème mois de la FAQ, la modélisation prévoit 400 questions et au 3ème mois elle en prévoit 490.
2. Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ la propriété "$u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$".

   Initialisation : $u_1 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3$. Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
   Hérédité : soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(N)$ est vraie, *i.e.* $u_N = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N$. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$. On part de la définition de la suite

   $$u_{N+1} = 0,9u_N + 1,3 = 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^N\right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{N+1}$$

   C'est $\mathcal{H}(N+1)$!
   Conclusion : on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
   La propriété est démontrée par principe de récurrence.
3. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = \dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \dfrac{10}{9} \times 0,9^n = 0,9^{n-1} \geq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
4. Ce programme renvoie le premier rang N tel que $u_N > p$. Dans le cas présent,

   $$u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < 4,5 \times 0,09 \iff 0,9^n < 0,405$$

   Par application du log strictement croissant sur $\mathbb{R}_*^+$,

   $$n\log(0,9) < \log(0,405) \iff n > \frac{\log(0,405)}{\log(0,9)} \iff n > 8,57$$

   Le programme renvoie donc $N = 9$.

Une autre modélisation

1. $v_1 = 9 - 6 = 3,00$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq 4,04$.
2. On cherche n tel que $v_n = 8,5$:

   $$9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 8,5 \iff e^{-0,19(n-1)} = \frac{0,5}{6} \iff -0,19(n-1) = -\ln(12) \iff n = 1 + \frac{\ln(12)}{0,19}$$

   On trouve après calculs $n = 15$.

Comparaison des deux modèles

1. Il s'agit de comparer les questions A.4. et B.2. . La première modélisation dépasse les 850 questions au 9ème mois alors que la deuxième ne les dépasse qu'au 15ème mois. La première modélisation conduit donc à la modification la plus prématurée.
2. Il s'agit en fait de calculer les limites des deux suites (u_n) et (v_n). Le cours sur les suites géométriques nous assure que pour $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Donc par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13$$

De plus, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-n) = 0$ donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 \times 0 = 9$$

La 1ère modélisation prévoit le plus de questions : au maximum 1300 alors que la 2ème modélisation n'en prévoit que 900.

Exercice 4

1. $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2. Il faut un point appartenant et (EC) : on a $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Il faut également un vecteur directeur de (EC) : on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Une représentation paramètre de (EC) est donc

$$\begin{cases} x &= 0+1t \\ y &= 0+1t \\ z &= 1-1t \end{cases} \implies \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 1-t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont 2 vecteurs directeurs du plan (GBD) et $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur directeur de la droite (EC). Or,

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times 0 - 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

De même,

$$\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GD}$ donc (EC) est orthogonal au plan (GBD).

4a. Un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ suffit généralement à caractériser un plan. Dans ce cas, l'équation cartésienne du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
Puisque (EC) est orthogonale à (BDG), $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal à (BCG). Donc l'équation cartésienne de (BDG) est de la forme $1x+1y-1z+d = 0$. Il reste à déterminer d. On sait qu'un point qui appartient au plan vérifie les coordonnées du plan. Or, $B \in (BDG)$ donc

$$x_B + y_B - z_B + d = 0 \implies 1 + 0 + 0 + d = 0 \implies d = -1$$

Donc une équation cartésienne de (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

4b. I est l'intersection de (BDG) est de (EC). Il vérifie à la fois l'équation cartésienne de (BDG) et l'équation paramétrique de (EC). Ainsi,

$$\begin{cases} x_B + y_B - z_B - 1 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} t_B + t_B + t_B - 2 &= 0 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies \begin{cases} 3t_B &= 2 \\ x_B &= t_B \\ y_B &= t_B \\ z_B &= 1 - t_B \end{cases} \implies t_B = \frac{2}{3}$$

Les coordonnées de I sont donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4c. Un schéma permet de se rendre compte que $d(E;GBD) = ||\overrightarrow{EI}||EI$. Or, $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2/3-0\\2/3-0\\1/3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

Donc,

$$EI = \sqrt{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5a. Pour montrer que BDG est équilatéral, il suffit de montrer que ses 3 côtés sont de même longueur. On calcule donc la norme des vecteurs associés aux 3 côtés : $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{2}$. Donc BDG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

5b. Géométriquement, on a :

$$\mathcal{A}_{BDG} = 2\mathcal{A}_{BJG}$$

Or, BJG est un triangle rectangle en J grâce aux propriétés sur les triangles équilatéraux. Donc en appliquant le théorème de Pythagore dans BJG, on trouve :

$$JG^2 + JB^2 = BG^2 \implies JG = \sqrt{BG^2 - JB^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

car $JB = DB/2 = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Donc l'aire du triangle BJG est :

$$\mathcal{A}_{BJG} = \frac{JG \times JB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(moitié de l'aire d'un rectangle)}$$

Et donc,

$$\mathcal{A}_{BDG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Le tétraèdre EGBD a pour base BDG et pour hauteur relative EI. Donc,

$$\mathcal{V}_{EBD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BDG} \times EI = \frac{\sqrt{3} \times 2}{3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.