Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SVT, veuillez visiter :
bac-maths-svt.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Corrigé

Voie générale – spécialité J2 – Centres étrangers – 11 juin 2026

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 — 4 points

1. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} x_\text{B}-x_\text{A} \\ y_\text{B}-y_\text{A} \\ z_\text{B}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ -1-3\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4\end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} x_\text{C}-x_\text{A} \\ y_\text{C}-y_\text{A} \\ z_\text{C}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-3\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2\end{pmatrix}$.

Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ils définissent donc un plan de l'espace.

2. Comme le repère est orthonormé, on va utiliser la formule analytique pour calculer les produits scalaires :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 4\times 1+4\times 1+2\times(-4) = 4+4-8 = 0$. $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont orthogonaux;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 4\times 0+4\times 1+2\times(-2) = 0+4-4 = 0$ $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui forment une base du plan (ABC), donc il est normal au plan (ABC).

3. Par propriété, on en déduit qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $4\times x+4\times y+2\times z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

A étant un point du plan (ABC), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

$$\begin{aligned}\text{A}\in(\text{ABC}) &\iff 4\times 1+4\times 0+2\times 3+d=0\\ &\iff 4+0+6+d=0\\ &\iff d=-10\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc bien $4x+4y+2z-10=0$.

En divisant cette équation par 2 (qui est non nul), on obtient une équation équivalente, donc une équation du plan (ABC) : $2x+2y+z-5=0$.

4. Vérifions que le point H appartient au plan (ABC).

$2\times x_\text{H}+2\times y_\text{H}+z_\text{H}-5 = 2\times 0+2\times 2+1-5 = 0+4+1-5 = 0$

Donc le point H appartient bien au plan (ABC).

5. On a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4\end{pmatrix}$.

Et : $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix} x_\text{H}-x_\text{A} \\ y_\text{H}-y_\text{A} \\ z_\text{H}-z_\text{A}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-3\end{pmatrix}$ et donc, finalement : $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, le produit scalaire peut se calculer avec la formule analytique :
$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}} = 1\times(-1)+1\times 2-4\times(-2) = -1+2+8 = 9$.

Comme on est dans un repère orthonormé :

$\text{AB} = \sqrt{x_{\overrightarrow{\text{AB}}}^2+y_{\overrightarrow{\text{AB}}}^2+z_{\overrightarrow{\text{AB}}}^2} = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

et de même : $\text{AH} = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$.

L'expression trigonométrique du produit scalaire donne :

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}} = \text{AB}\times\text{AH}\times\cos\left(\widehat{\text{BAH}}\right)$

donc, avec les valeurs connues : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 3\sqrt{2}\times 3\times\cos\left(\widehat{BAH}\right)$

$= 9\sqrt{2}\cos\left(\widehat{BAH}\right)$

On a donc deux expressions du même produit scalaire, ce qui donne :

$9 = 9\sqrt{2}\cos\left(\widehat{BAH}\right) \iff \cos\left(\widehat{BAH}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $\widehat{BAH} = 45°$.

6. La droite (d) orthogonale au plan (ABC) donc tout vecteur normal au plan (ABC) est un vecteur directeur de la droite (d).

(d) admet donc le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur et passe par le point H.

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 4\times t \\ y = 2 + 4\times t \\ z = 1 + 2\times t \end{cases} \qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

7. Soit S un point de la droite (d).

Le point H appartient à la fois au plan (ABC) et à la droite (d) qui est orthogonale au plan (ABC) donc H est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).

La distance entre le point S et le plan (ABC) est donc égale à la distance SH.

S est un point de la droite (d) donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_S = 4t \\ y_S = 2+4t \\ z_S = 1+2t \end{cases}$.

On a :

$\text{SH} = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + \left(y_H - y_S\right)^2 + (z_H - z_S)^2}$

$= \sqrt{(0-4t)^2 + (2-2-4t)^2 + (1-1-2t)^2}$

$= \sqrt{16t^2 + 16t^2 + 4t^2}$

$= \sqrt{36t^2}$

$= 6|t|$ car une distance est positive

De plus, la distance entre le point S et le plan (ABC) doit être égale à 6, on a donc :

$6|t| = 6 \iff |t| = 1$

$\iff t = -1$ ou $t = 1$

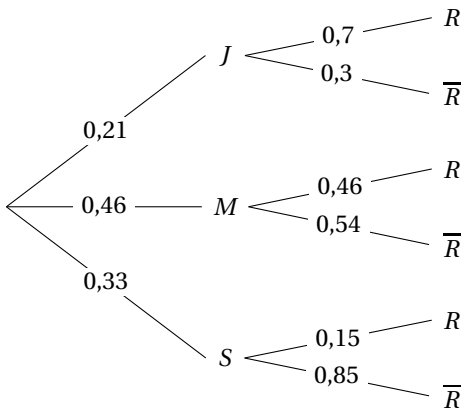
Enfin, l'abscisse x_S doit être positive, on doit donc avoir $4t \geq 0$ soit $t \geq 0$.

On a donc : $t = 1$ et les coordonnés de S sont : $(4\,;6\,;3)$.

EXERCICE 2 — 4 points

Partie A

1. L'arbre de probabilité représentant la situation est :



2. $P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0{,}46 \times 0{,}46 = 0{,}2116$.

La probabilité que la personne interrogée ait entre 30 et 59 ans et ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,2116 (valeur exacte).

3. **a.** Calculons la probabilité qu'une personne ait déjà publié sur ce réseau social, c'est à dire calculons $P(R)$.

Les événements J, M et S forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(J \cap R) + P(M \cap R) + P(S \cap R) \\ &= P(J) \times P_J(R) + P(M) \times P_M(R) + P(S) \times P_S(R) \\ &= 0{,}21 \times 0{,}7 + 0{,}46 \times 0{,}46 + 0{,}33 \times 0{,}15 \\ &= 0{,}4081 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,4081 (valeur exacte).

b. Déterminons la probabilité qu'une personne ait au moins 60 ans sachant qu'elle a déjà publié sur ce réseau social, c'est à dire calculons $P_R(S)$

$P_R(S) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(R)} = \dfrac{0{,}33 \times 0{,}15}{0{,}4081} \approx 0{,}12129$

La probabilité qu'une personne ait au moins 60 ans sachant qu'elle a déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,121 arrondi au millième.

Partie B

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, ses paramètres sont $n = 100$ et $p = 0{,}41$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0{,}41$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. À l'aide de la calculatrice : $P(X \geq 50) \approx 0{,}04279$

La probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social est égale à 0,043 au millième près.

3. $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}41 = 41$

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 41.

Si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, en moyenne 41 personnes sur les 100 auront déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

La variable aléatoire Y est définie par : $Y = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}$ est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 150 de la variable aléatoire X on a donc :
$E(Y) = E(X) = 41$
et $V(Y) = \dfrac{1}{150} V(X)$
$= \dfrac{100 \times 0{,}41 \times (1 - 0{,}41)}{150}$ car X suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,41
$= \dfrac{24{,}19}{150}$
On a : $P(37 < Y < 45) = P(-4 < Y - 41 < 4) = 1 - P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right)$
Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$\forall\, t \in \mathbb{R}^{*+}, \quad P\left(\left|Y - E(Y)\right| \geq t\right) \leq \dfrac{V(Y)}{t^2}$.
Avec $t = 4$ on a : $P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \leq \dfrac{24{,}19}{150 \times 4^2}$
soit $P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \leq \dfrac{803}{80000}$
On a donc : $1 - P\left(\left|Y - 41\right| \geq 4\right) \geq 1 - \dfrac{803}{80000}$
D'où : $P(37 < Y < 45) \geq 0{,}98996$
La probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est donc strictement supérieure à 98 %.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(3x^2 + 2x\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminons la dérivée de la fonction f.
f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x$, on a donc $u'(x) = 3 \times 2x + 2 = 6x + 2$.
La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$ donc pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x}$.
$\forall\, x \in [2\,;+\infty[, \quad 6x + 2 > 0$ et $3x^2 + 2x > 0$ donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

2. **a.** Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.
De plus, $g(2) = \ln(3 \times 2^2 + 2 \times 2) - 2 = \ln(16) - 2 > 0$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
Remarque : $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 4{,}05$.

c. La fonction g étant strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$ et s'annulant en α, on a le tableau de signes suivant :

x	2		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. Pour tout entier naturel non nul n, posons P_n l'affirmation : « $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ ».
Démontrons par récurrence que les affirmations P_n sont toutes vraies.

- **Initialisation :** Par hypothèse $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$
  Donc que l'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est à dire $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ »., montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ ».
  P_n est vraie $\Longrightarrow 2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$
  $\Longrightarrow f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha)$ car la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$
  $\Longrightarrow \ln(16) \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$ et par définition de la suite (a_n)
  $\Longrightarrow 2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ car $\ln(16) \approx 2{,}77$
  $\Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** On a montré que l'affirmation P_0 est vraie, et que pour un n entier naturel non nul, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
  En vertu du principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, l'affirmation est vraie, et donc pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Soit n un entier naturel quelconque :
$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = g(a_n)$.
Or, d'après la question précédente $a_n \in [2\ ;\ \alpha]$ et on a démontré dans la partie A, que la fonction g est positive sur cet intervalle,
donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$
donc la suite (a_n) est croissante.

3. On a montré que la suite (a_n) est majorée par α et qu'elle est croissante, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \alpha$.

4. La suite (a_n) est définie par une relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$ avec f une fonction continue.
De plus, la suite (a_n) est convergente vers une limite ℓ.
D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ soit de l'équation $g(x) = 0$.
D'après la partie A, cette équation admet une unique solution α donc $\ell = \alpha$.

Partie C

1. Dans la partie B, on a montré que pour tout entier naturel n, $a_n < \alpha$.
On sait que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α donc pour tout entier naturel n, $\alpha \leqslant b_n$
Donc pour tout entier naturel n, on a $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ d'où $a_n \leqslant b_n$.

2. **a.** L'instruction `algo(2)` renvoie : (9, 4.04) arrondi au millième

b. Cette algorithme calcule les termes successifs des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à ce que $b_n - a_n \leqslant 10^{-p}$. Il renvoie donc le 1er rang i pour lequel $b_n - a_n \leqslant 10^{-p}$ ainsi que le terme a_i
Le premier rang pour lequel on aura $a_n - b_n \leqslant 10^{-2}$ est donc 9 et $a_9 \approx 4{,}04$.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A

$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de f ;
$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de f'' ;
$\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de f' .
Justification : (non demandées)
Le signe de f'' donne les variations de la fonction f' et la convexité de la fonction f.

Le signe de f' donne les variations de la fonction f.
On remarque que :

- le sens de variation de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$ correspond au signe de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$;
- le signe de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à la convexité de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$;
- le sens de variation de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond au signe de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$.

d'où la réponse.

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

g est de la forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$. On a : $\begin{cases} u'(x) = 2x - 3 \\ v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.

$g' = u'v + v'u$

donc, pour tout réel x, $g'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} - (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned} &= \mathrm{e}^{-x}\left(2x - 3 - x^2 + 3x\right) \\ &= \left(-x^2 + 5x - 3\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel x : $g'(x) + g(x) = \left(-x^2+5x-3\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned} &= \left(-x^2 + 5x - 3 + x^2 - 3x\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Donc g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Cette équation est de la forme $y' = ay$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont la somme d'une solution particulière de l'équation et des solutions de l'équation homogène associée.

Le solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

4. f est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $f(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}$

Or $f(0) = 2$ donc $C\mathrm{e}^{-0} + \left(0^2 - 3\times 0\right)\mathrm{e}^{-0} = 2 \iff C + 0 = 2$

$$\iff C = 2$$

Donc, pour tout réel x, $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$

Partie C

1. Une exponentielle est strictement positive donc $f(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 2$.

Or $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ donc les racines sont 1 et 2.

Un polynôme du second degré est du signe du coefficient dominant ($1 > 0$ ici) sauf entre les racines donc :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+2\right) = +\infty$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b. Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-3x+2\right) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$

D'une part, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$

D'autre part, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2} = 0\end{cases}$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) = 1$

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. a. $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x$

$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-3x+2\right)$ est de la forme u_1v_1' avec $\begin{cases}u_1(x) = x^2-3x+2\\ v_1'(x) = \mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases}u_1'(x) = 2x-3\\ v_1(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Les fonctions u_1 et v_1 sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions u_1' et v_1' sont continues sur $\mathbb{R}$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u_1(x)v_1'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u_1(x)v_1(x)\Big]_a^b - \int_a^b u_1'(x)v_1(x)\,\mathrm{d}x$

d'où $I = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\left(x^2-3x+2\right)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}(2x-3)\,\mathrm{d}x$

$= -\mathrm{e}^{-1}\left(1^2-3\times1+2\right) + \mathrm{e}^{-0}\left(0^2-3\times0+2\right) + \displaystyle\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\times0+2+\displaystyle\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$= 2+\displaystyle\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Soit $J = \displaystyle\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(2x-3)$ est de la forme u_2v_2' avec $\begin{cases}u_2(x) = 2x-3\\ v_2'(x) = \mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Ce qui implique : $\begin{cases}u_2'(x) = 2\\ v_2(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Les fonctions u_2 et v_2 sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions u_2' et v_2' sont continues sur $\mathbb{R}$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u_2(x)v_2'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u_2(x)v_2(x)\Big]_a^b - \int_a^b u_2'(x)v_2(x)\,\mathrm{d}x$

d'où $J = \Big[-\mathrm{e}^{-x}(2x-3)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\times2\,\mathrm{d}x$

$= -\mathrm{e}^{-1}(2\times1-3) + \mathrm{e}^{-0}(2\times0-3) - 2\Big[\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1$

$= -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\times(-1)-3-2\,\mathrm{e}^{-1}+2\,\mathrm{e}^{0}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{e}}-3-2\dfrac{1}{\mathrm{e}}+2$

$= -1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

D'où $I = 2+J = 2-1-\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b. D'après la question **Partie C 1.** , sur l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \geqslant 0$.
donc I est égale à l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe $\mathscr{C}_f$;

- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie D

1. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$.
L'ordonnée à l'origine est donc égale à $f(a) - af'(a)$.
f est solution de l'équation différentielle (E) donc, pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$ soit $f'(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} - f(x)$.
On a donc : $f'(x) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-x^2+5x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$
Remarque : on peut utiliser la formule usuel de la dérivée d'un produit pour déterminer la dérivée de la fonction f.
D'où $f(a) - af'(a) = \mathrm{e}^{-a}\left(a^2-3a+2\right) - a\left(-a^2+5a-5\right)\mathrm{e}^{-a}$

$$= \left(a^2-3a+2+a^3-5a^2+5a\right)\mathrm{e}^{-a}$$
$$= \left(a^3-4a^2+2a+2\right)\mathrm{e}^{-a}$$

Le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a donc bien pour ordonnée $\left(a^3-4a^2+2a+2\right)\mathrm{e}^{-a}$.

2. Une tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère si et seulement si l'ordonnée à l'origine de la tangente est nul, c'est à dire si et seulement si $\left(a^3-4a^2+2a+2\right)\mathrm{e}^{-a} = 0$.
On cherche donc à déterminer le nombre de solutions de l'équation $\left(x^3-4x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\left(x^3-4x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x^3-4x^2+2x+2 = 0$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3-4x^2+2x+2$.
Étudions la fonction h pour déterminer ses racines.

Pour tout réel x, $h(x) = x^3\left(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = 1 \end{cases} \quad \text{donc, par produit, } \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = 1 \end{cases} \quad \text{donc, par produit, } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $h'(x) = 3x^2-8x+2$.
h est une fonction polynôme du second degré.
Son discriminant est égal à :
$\Delta = (-8)^2 - 4\times3\times2 = 40 > 0$
$h'(x)$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{40}}{2\times3} = \frac{4-\sqrt{10}}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{8+\sqrt{40}}{2\times3} = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction h :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de h	$-\infty$	↗	$h(x_1)$	↘	$h(x_2)$	↗	$+\infty$

À l'aide de la calculatrice :

$h(x_1) = \dfrac{20\sqrt{10}-2}{27} > 0$ et $h(x_2) = \dfrac{-20\sqrt{10}-2}{27} < 0$.

Sur l'intervalle $]-\infty\,;x_1]$:

La fonction h est continue (car dérivable) sur $]-\infty\ ;\ x_1]$, sur cet intervalle, elle est strictement croissante.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty < 0$ et $f(x_1) > 0$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ x_1[$.

De même, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]x_1\,;x_2[$ et une unique solution dans l'intervalle $]x_2\ ;\ +\infty[$.

L'équation $h(x) = 0$ admet donc exactement 3 solutions sur $\mathbb{R}$ et il existe trois tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.